# TEOREMA DI PITAGORA

Pitagora figlio di Mnesarco, nato a Samo circa nella 49ª Olimpiade, si trasferì a Crotone nella 59ª o 60ª Olimpiade. Qui fondò la **"Scuola italica"**, in parte scientifica ma anche politico-religiosa, riunì una folla di discepoli di ambo i sessi, accorsi da ogni parte d'Italia. Pitagora morì a Metaponto verso la 69ª Olimpiade e poi le sue dottrine si sparsero per tutta la Grecia.

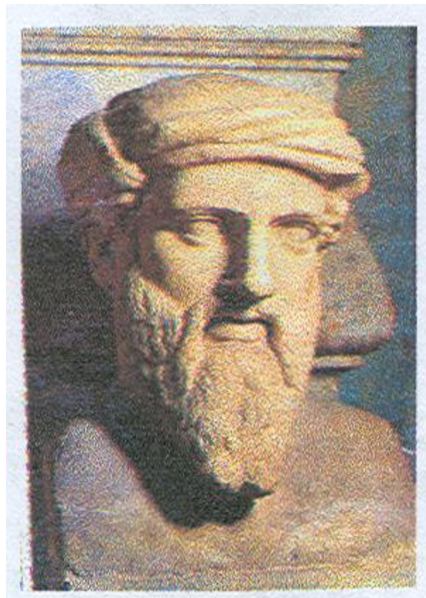
Le date riportate sulla nascita e la morte di Pitagora,vanno in sintonia con le Olimpiadi di Atene 2004, per ricordare l'Atleta Milone, Crotoniate, vincitore sette volte nei giochi Olimpici

In più di due millenni e mezzo di storia il famoso teorema, da taluno definito come "il ponte dell'asino", la prova del nove per la misura del grado di intelligenza e dell'attitudine di ogni giovane allo studio della matematica, ha avuto una folta schiera di altre dimostrazioni nessuna delle quali però, è dovere rilevarlo, sia per eleganza che per concisione, uguaglia quella indicata da Euclide, detta la sedia della sposa, sedia della maritata o coda di pavone.

La formula : **"indicando con c la lunghezza dell'ipotenusa e con a e b le lunghezze dei cateti di un triangolo rettangolo si può scrivere la relazione tra numeri $a^2 + b^2 = c^2$ "** è detta relazione pitagorica, perché scoperta da Pitagora..

La generalizzazione dell'equazione pitagorica, ottenuta sostituendo a 2 un qualsiasi esponente intero positivo n, cioè $a^n + b^n = c^n$ , è passato alla storia come uno dei problemi più difficili : è l'oggetto dell'Ultimo Teorema di Fermat(1601-1665), dimostrato solo in tempi recentissimi(1994), da **Andrew John Wiles.**.

## PITAGORA



PITAGORA (570-490 a:C)

Di Pitagora si tramandano le regole che governano la vita della comunita' pitagorica a noi giunte tramite i "versi aurei". iscrizione posta sopra la porta della scuola di Pitagora:

> "CHI NON SA QUEL CHE DEVE SAPERE E' UN BRUTO FRA I BRUTI; CHI NON SA PIU' DI QUEL CHE DEVE SAPERE E' UN UOMO FRA I BRUTI; MA CHI SA TUTTO CIO' CHE DEVE SAPERE E' UN DIO TRA GLI UOMINI".

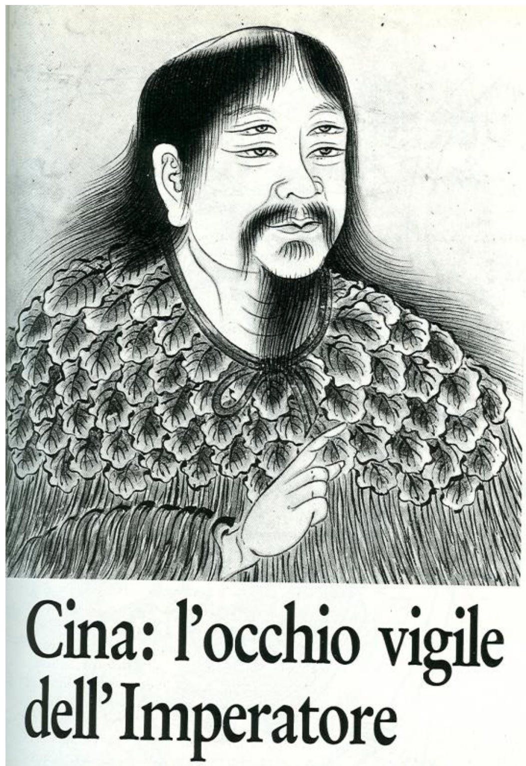
INSOMMA NEI VERSI AUREI SONO CONTENUTE DIVERSE NORME DI VIVERE CIVILE.

**CONFUCIO**

CONFUCIO (551-479 a.C.)

Di Confucio invece si tramandano delle “massime”, tratte dai “dialoghi”, che riguardano : il progresso morale, studio ed educazione, pieta’ filiale e famiglia, riti e norme tradizionali di condotta, l’impegno politico, consigli pratici e valutazioni varie.

## IMPERATORE




**PER UN BUON GOVERNO OCCORREVA AVERE 4 OCCHI VIGILI**

CANG JIE

## CANG JIE , IL LEGGENDARIO INVENTORE DELLA SCRITTURA CINESE

Secondo la tradizione,il primo storico cinese si chiama *Cang Jie*. Si dice che quest'ufficiale al servizio del leggendario fondatore dell'impero cinese, l'"Imperatore Giallo" *Huangdi* (terzo millennio a.C.), abbia inventato *"lo shi"*, l'ideogramma, rendendo così possibile la scrittura della storia.

L'ideogramma per la parola shi consiste, infatti, nella rappresentazione di una mano e di una tavoletta di bambù. Gli storici delle origini erano figure onnipotenti e misteriose. Astrologi e geomanti, essi assicuravano l'esatta applicazione delle affermazioni degli oracoli, sorvegliavano tutte le azioni del sovrano e dei suoi ministri e presiedevano alle cerimonie di investitura e ai culti degli spiriti ancestrali del cielo e della terra.

Il filosofo e pensatore CONFUCIO (551-479) è tradizionalmente ritenuto l'autore degli annali del regno di ***Lu.***

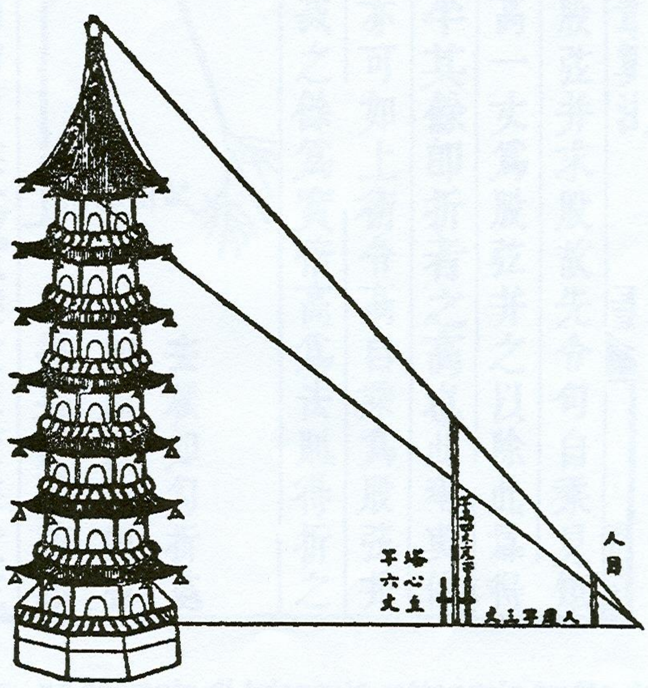
**La matematica cinese**

I due più antichi trattati di matematica sono il *Chou Pei Suan Ching* (Classico aritmetico dello gnomone delle orbite circolari del cielo) ed il *Chiu Chang Suan Shu* (Nove capitoli sulle arti matematiche): entrambi di datazione incerta, sono sicuramente anteriori all'anno 100 d.C..

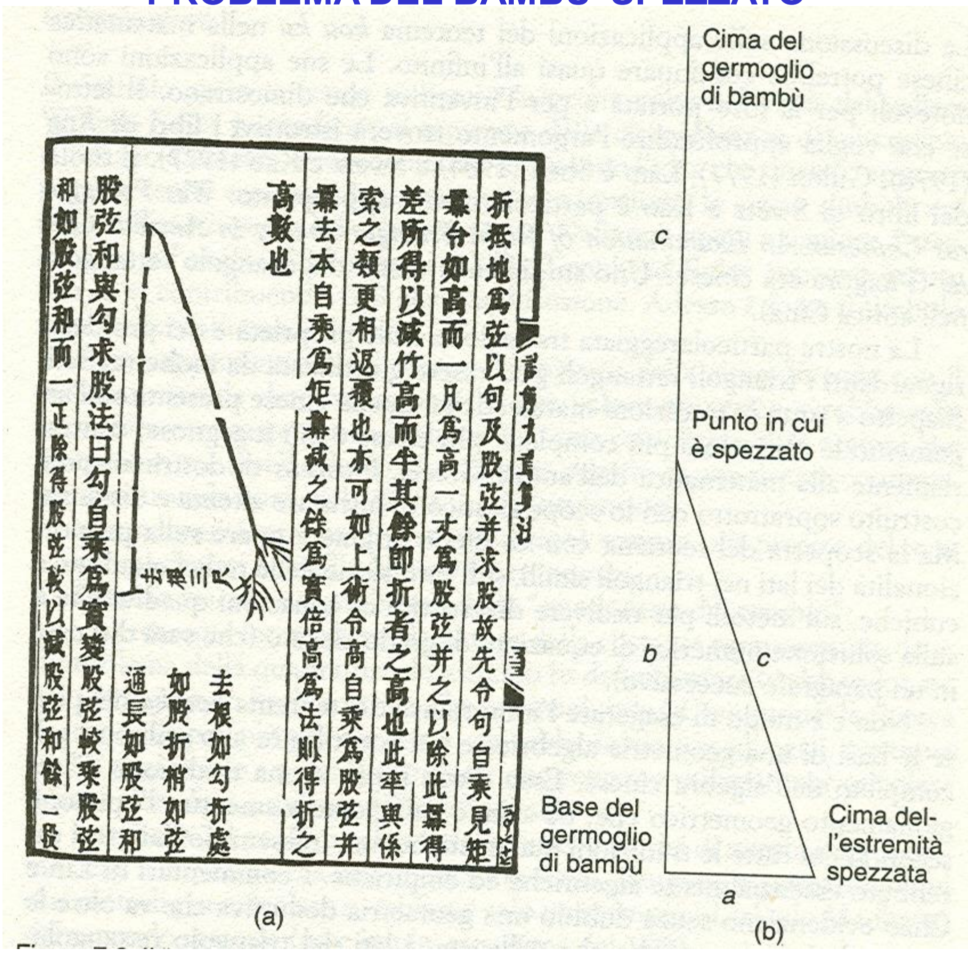
L'aspetto più curioso del *Chou Pei* è il fatto che esso contiene il **teorema di Pitagora**, descritto sotto forma di **dialogo**, e corredato di una dimostrazione grafica. Viene addirittura citata la formula

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

che viene così descritta a parole: "moltiplica l'altezza del palo e la lunghezza dell'ombra per i loro valori, aggiungi i quadrati ed estrai la radice quadrata della somma ottenuta". Il testo originale è: *kou ku ko tzu chhêng, ping erh khai fang chhu chih.* Lo studio del triangolo rettangolo fu approfondito nei secoli seguenti, soprattutto in funzione delle applicazioni pratiche alla misurazione delle altezze degli edifici e della profondità dei corsi d'acqua.



## PROBLEMA DEL BAMBU' SPEZZATO




***C'è un bambù alto 10 chih la cui estremità superiore, essendo spezzata, tocca il terreno a 3 chih di distanza dalla base del fusto. A che altezza si trova la frattura?***

La figura (a) lo rappresenta come viene illustrato nel testo originale Cinese.

La soluzione proposta è: Prendere il quadrato della distanza tra la base del bambù e il punto dove la cima tocca il terreno, poi dividere la quantità ottenuta per la lunghezza del bambù. Sottraete il risultato dalla lunghezza del bambù e dividete per 2 la differenza. Il risultato fornisce l'altezza del punto in cui il bambù è spezzato.

Queste istruzioni possono essere espresse nella notazione moderna, riferendoci alla figura (b) come triangolo rettangolo con i cateti a e b ed ipotenusa c.

Siano a = distanza dalla base del bambù

b + c = lunghezza del bambù

b = altezza della parte eretta del bambù.

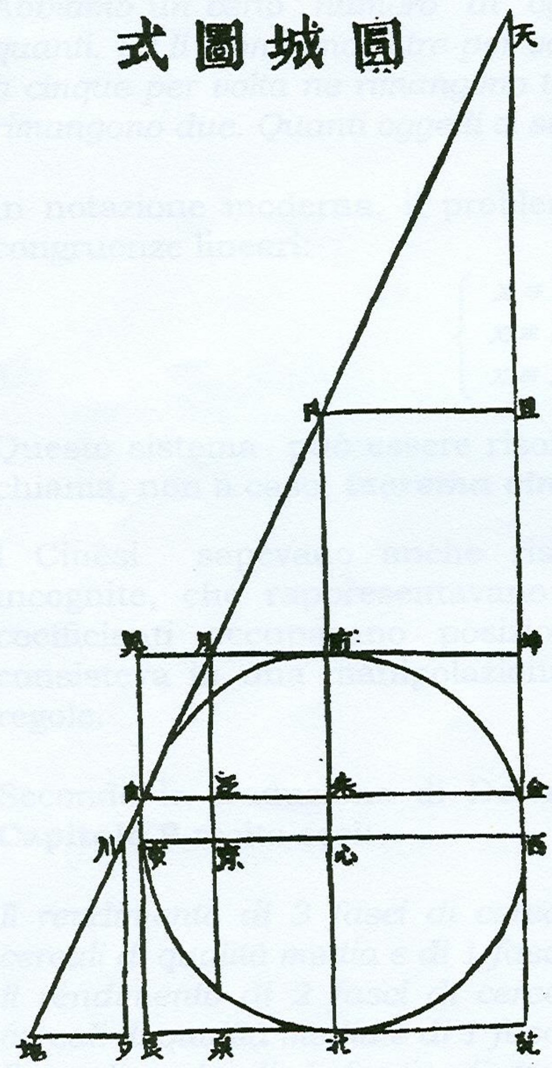
Quindi la regola espressa sopra è equivalente a

$$b = \frac{1}{2}\left(b + c - \frac{a^2}{b + c}\right) \qquad \text{da cui} \qquad b = \frac{1}{2}\left(10 - \frac{9}{10}\right) = \frac{91}{20}\,chih$$

(G.G.Joseph- C'era una volta un numero,Saggiatore,Milano pag.188).

# TRIANGOLO RETTANGOLO CIRCOSCRITTO AD UN CERCHIO METODO CINESE

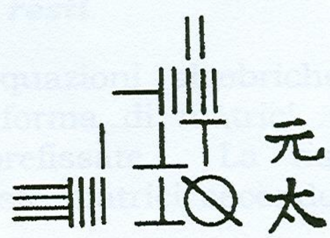
In effetti i Cinesi, oltre alle tecniche di calcolo aritmetico impiegate nell'attività commerciale, seppero sviluppare metodi avanzati per la risoluzione, esatta o approssimata, di equazioni algebriche. Nel *Tshê Yuan Hai Ching* di Li Yeh (1248), ritroviamo il triangolo rettangolo, circoscritto ad un cerchio.




Tuttavia incontriamo soprattutto equazioni algebriche, di grado anche superiore al secondo. Vediamo, ad esempio, l'equazione cubica:

$$2x^3 + 15x^2 + 166x - 4460 = 0,$$

che l'autore scrive sovrapponendo i coefficienti secondo l'ordine crescente dei gradi:



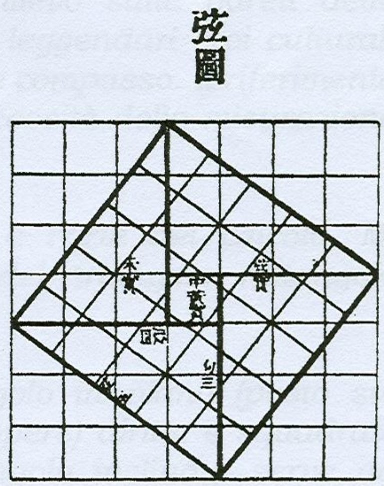

Lo zero di 4460 è barrato, per indicare che al numero va anteposto il segno meno. Il livello raggiunto dall'algebra in Cina nel secolo XIII era sicuramente molto più avanzato rispetto all'Europa: poco avevano saputo fare i greci e gli **arabi**, e z

# "SCIENZA E CIVILTA' IN CINA"

**TRASCRIZIONE ORIGINALE DEL DIALOGO TRA IL DUCA CHOU KUNG E UN NOTABILE CHIAMATO SHANG KAO SULLE PROPRIETÀ DEI TRIANGOLI RETTANGOLI** da: J. NEEDHM trad. di M.Baccianini e G.Mainardi, vol. III, Einaudi

Pare che il triangolo rettangolo di lati *3, 4, 5* fosse noto ai **Cinesi** fin dai tempi più remoti. Ve ne sono chiare tracce nei più antichi trattati di matematica che ci sono pervenuti. Ne citiamo un brano significativo.

*1) Una volta, Chou Kung si rivolse a Shang Kao, dicendo: "Ho sentito che il Grande Prefetto (Shang Kao) è versato nell'arte del calcolo. Posso avere l'ardire di chiedere in che modo Fu-Hsi stabilì anticamente i gradi della sfera celeste? Non vi sono scalini con cui si possa salire al cielo e la terra non è misurabile con un regolo della lunghezza di un piede. Mi piacerebbe sapere da te qual è l'origine di questi numeri".*




Dimostrazione del teorema di Pitagora nel *Chou Pei Suan Ching*.

*2) Shang Kao rispose: "L'arte del calcolo proviene dal cerchio (yuan) e dal quadrato (fang). Il cerchio è derivato dal quadrato e il quadrato dal rettangolo (letteralmente squadra a T o squadra da carpentiere; chü).*

*3) Il rettangolo ha origine dal (fatto che) 9 x 9 = 81 (ovvero la tavola per le moltiplicazioni o le proprietà dei numeri in quanto tali).*

*4) Dividiamo perciò un rettangolo (diagonalmente) e poniamo che la larghezza (kou) sia di 3 (unità) e la lunghezza (ku) di 4 (unità). La diagonale (ching) fra i (due) angoli sarà allora lunga 5 (unità). Adesso, dopo aver disegnato un quadrato su questa diagonale, circoscriviamolo con mezzi rettangoli come quello che è rimasto fuori, in modo da formare una tavola (quadrata). I "quattro" mezzi rettangoli esterni che misurano 3 unità di larghezza, 4 di lunghezza e 5 di diagonale, formano in tal modo insieme (tê chhêng) due rettangoli (di superficie 24); così (quando questa viene sottratta dalla tavola quadrata di superficie 49) il resto (chang) è una superficie di 25 unità. Questo (procedimento) è chiamato "accumulare i rettangoli'*

5) *I metodi usati da Yü il Grande per governare il mondo erano derivati da questi numeri".*

*[Si ricorderà che il leggendario Yü era il santo patrono degli ingegneri idraulici e di tutti coloro che si occupavano del controllo delle acque, dell'irrigazione e della conservazione. Testimonianze epigrafiche dei Han posteriori, quando il Chou Pei assunse la sua forma attuale, ci mostrano, scolpiti in rilievo sulle pareti delle tombe-sacrario di Wu Liang (140 a. C.), i leggendari eroi culturali Fu-Hsi e Nü-Kua che impugnano squadre e compasso. Il riferimento a Yü indica qui indubbiamente l'antica necessità della misurazione e della matematica applicata.]*

6) *Choti Kung esclamò: "Davvero grande è l'arte del calcolo. Mi piacerebbe conoscere il Tao dell'uso del triangolo rettangolo (letteralmente squadra a T)".*

7) *Shang Kao rispose: "Il triangolo rettangolo in piano (posto sul terreno) serve a stendere il progetto di (opere) diritte e squadrate (con l'aiuto di) corde. Il triangolo rettangolo inclinato serve ad* ***osservare le altezze****. Il triangolo rettangolo rovesciato serve a* ***scandagliare le profondità****. Il triangolo rettangolo in posizione orizzontale è usato per* ***accertare le distanze****.*

8) *Mediante la rotazione di un triangolo rettangolo (compasso) si può formare un cerchio. Unendo triangoli rettangoli si formano quadrati (e rettangoli).*

9) *Il quadrato appartiene alla terra, il cerchio appartiene al cielo, in quanto il cielo è rotondo e la terra è quadrata. Poiché i numeri del quadrato costituiscono il modello, le (dimensioni del) cerchio vengono (dedotte) da quelle del quadrato.*

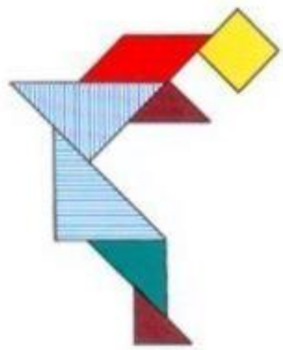
10) *Il cielo è come un cappello da sole (li) conico. I colori del cielo sono il blu e il nero, quelli della terra il giallo e il rosso. Per rappresentare il cielo viene usata una tavola circolare, tracciata secondo i numeri celesti; sopra, come un indumento esterno, essa è blu e nera, sotto, come un indumento interno, rossa e gialla.*

# TANGRAM :

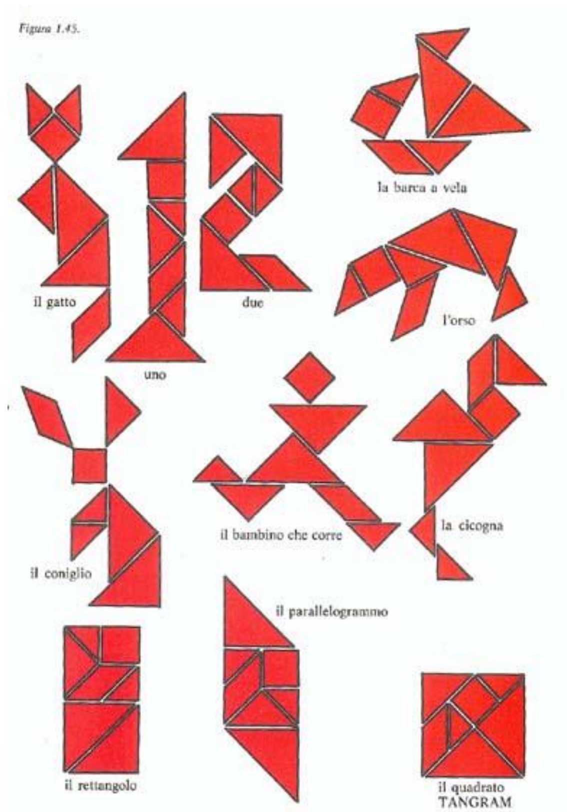
**ANTICO GIOCO CINESE, USATO ANCHE IN PSICOLOGIA, CHE CONSISTE NELL'OTTENERE DIVERSE FIGURE COMPONENDO VARIAMENTE 7 "TAN"**

**I tan si ottengono sezionando un quadrato in 7 tan:**

2 triangoli rettangoli isosceli grandi, colorati in celeste;
2 triangoli isosceli piu' piccoli, colorati in marrone:
1 triangolo rettangolo isoscele medio, colorato in verde:
1 quadrato, colorato in giallo;
1 parallelogramma



Componendo i tan, si possono ottenere tante figure tutte diverse ma di uguale area, perche' equicomposte

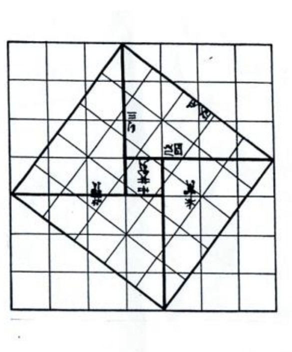


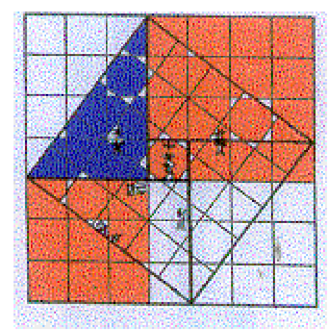
# VERIFICA GRAFICA DELLA RELAZIONE FRA I LATI 3, 4, 5, DEL TRIANGOLO RETTANGOLO IN CINA, II SEC. A.C..

Per quanto riguarda la Cina, la lettura del Chou Pei Suan Ching, che risale al II secolo a.c., mostra che veniva verificata graficamente come in fig. 2 la relazione fra i lati 3, 4, 5 del triangolo rettangolo. Nello stesso testo si dice:

" il triangolo rettangolo in piano (posto sul terreno) serve a stendere il progetto di opere dritte e squadrate con l'aiuto di corde" (si veda l'analogia con gli usi egizi ed indiani)

"serve, inclinato, ad osservare le altezze, rovesciato a scandagliare le profondità, in posizione orizzontale per valutare le distanze". Insomma l'interesse dei cinesi verso il triangolo rettangolo, come quello degli altri popoli che non fossero l'ellenico, era essenzialmente pratico.





sia un quadrato costruito su 7 unità di lunghezze, come in figura, **esso può essere formato da 4 rettangoli di lati 3 e 4, e da un'unità quadrata posta nel centro**.

Lo stesso quadrato si può pure pensare come formato dalla **somma dei quadrati $3^2$ e $4^2$ e di due rettangoli di lati 3 e 4, ossia:**

$$7^2 = 3^2 + 4^2 + 2(3x4) \quad (1)$$

Se si considera ora il quadrato formato dalle diagonali dei primi quattro rettangoli, si osserva che il quadrato è uguale alla somma di esso e di 4 mezzi rettangoli, (3 e 4), sarà perciò

$$7^2 = 2(3x4) + z^2 \qquad (2)$$

$z^2$ =quadrato formato con le diagonali del rettangolo (3, 4), ossia $5^2$ .

Dal confronto delle (1) e (2) risulta dunque che il quadrato della diagonale del rettangolo 3, 4, è uguale alla somma $3^2 + 4^2 = 5^2 = 25$ quadratini.

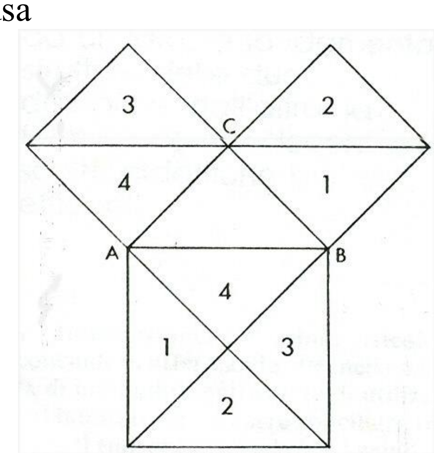
# DIMOSTRAZIONI DEL TEOREMA DI PITAGORA ATTRIBUITE ALLO STESSO PITAGORA

La maggior parte degli studiosi di storia della matematica riconoscono a Pitagora e alla sua scuola, il merito di avere, per primi, sentito la necessità di impostare su un ragionamento "deduttivo" lo studio della geometria. Sappiamo che fino ad allora essa era stata un insieme di regole empiriche suggerite da considerazioni su figura della realtà concreta: tra quelle regole non si era riconosciuto alcun legame, né l'origine comune da un ristretto numero di postulati.

## I° METODO

Secondo **Giorgio Cantor** (1845-1918), Pitagora aveva dimostrato il teorema che porta il suo nome soltanto in diversi casi particolari, tra cui quello del triangolo rettangolo isoscele, il più semplice caso che rende ovvia la dimostrazione come si rileva dalla figura da cui spunta il numero irrazionale dato dal rapporto fra la diagonale ed il lato del quadrato $\frac{c}{a} = \sqrt{2}$

Dato il triangolo rettangolo isoscele ABC, si indica con a, la lunghezza dei rispettivi cateti, e con c l'ipotenusa




Nella figura i triangoli contrassegnati con numeri sono uguali fra loro ed a quello dato ABC. La somma dei triangoli sui cateti è uguale a quella costruiti sull'ipotenusa.

$a^2 + a^2 = b^2$ ossia $b^2 = 2a^2$ , da cui $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$ , detto numero irrazionale.

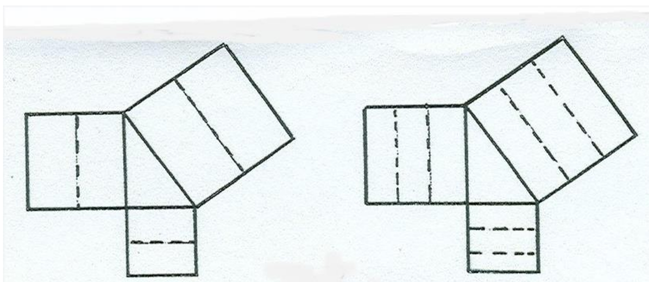
A causa dello strano comportamento dei numeri irrazionali, i Pitagorici cercarono di limitare ai numeri razionali le loro discussioni matematiche.

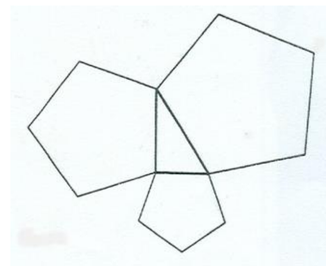
Si racconta che i Pitagorici fossero talmente delusi per la loro scoperta che esistevano numeri non esprimibili come rapporto di due numeri interi, che cercarono di conservare il segreto su tutta la faccenda. Secondo la leggenda, uno di Pitagorici, Ippaso, fu annegato dai suoi confratelli, a Metaponto, per aver svelato il segreto a degli estranei.

# ESTENSIONE DEL TEOREMA DI PITAGORA

Ragioniamo: è chiaro che se il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti, questa equivalenza sarà valida anche per rettangoli uguali alla metà, a 1/3,..

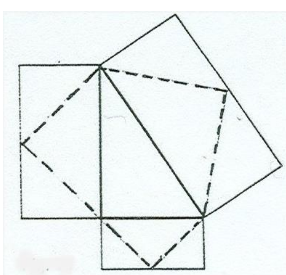
Dunque la proprietà è valida se sui lati del triangolo si costruiscono rettangoli simili.

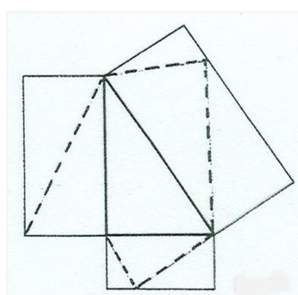


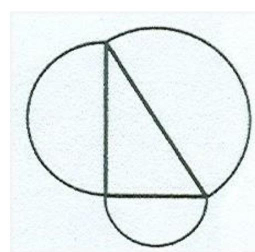


E' anche evidente che la proprietà sarà valida anche per triangoli metà di rettangoli simili. Siccome due triangoli aventi uguali base ed uguale altezza sono equivalenti, si capisce che la proprietà Pitagorica sarà valida purché sia sempre lo stesso il rapporto fra le altezze di questi triangoli che hanno per basi i lati del triangolo rettangolo.

Non è essenziale che i triangoli costruiti sui lati del triangolo rettangolo siano simili.







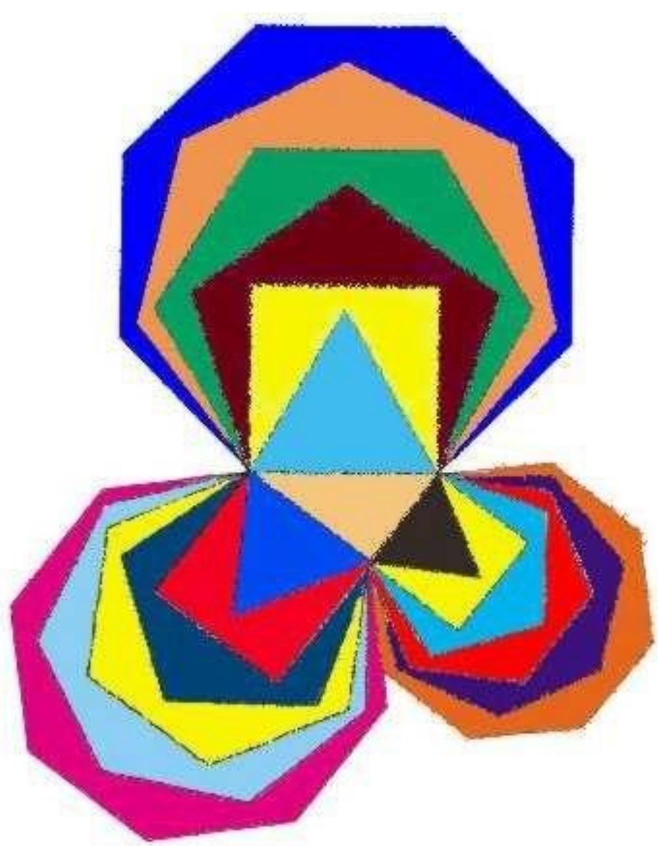
Il teorema di Pitagora può essere esteso anche a figure curvilinee, per esempio alle "Lunule di Ippocrate (440 a.C.)

Se sui lati del triangolo rettangolo si disegnano semicerchi aventi per diametro i rispettivi lati, la somma dei semicerchi sui cateti è uguale al semicerchio sull'ipotenusa.

Questo è valido, perchè le aree dei cerchi o semicerchi stanno fra loro come i quadrati dei loro diametri

PROPRIETA' VALIDA

E' anche evidente che la proprietà è valida se si costruiscono dei pentagoni regolari, triangoli equilateri....



# DALLE TERNE PITAGORICHE AL NUMERO “AUREO”:
# LA SCOPERTA PIU’ ESALTANTE DEI PITAGORICI

Gli egiziani, i babilonesi, gli indi e i cinesi, erano pervenuti ad applicazioni d’interesse pratico, di alcuni triangoli rettangoli. Usavano solamente triangoli con lati (3, 4, 5); (5, 12, 13); (8, 15, 17); (12, 35, 37), perché non erano conosciute altre “terne Pitagoriche”.

Pitagora, invece, trovò mediante un metodo razionale applicato ai numeri figurati quadrati, la famosa formula generale per avere infinite terne:

$$n, \frac{(n^2-1)}{2}, \frac{(n^2+1)}{2}$$

per n uguale ad un numero dispari, si hanno terne di numeri interi, ad esempio per n = 5 si ha la terna pitagorica: 5, 12, 13

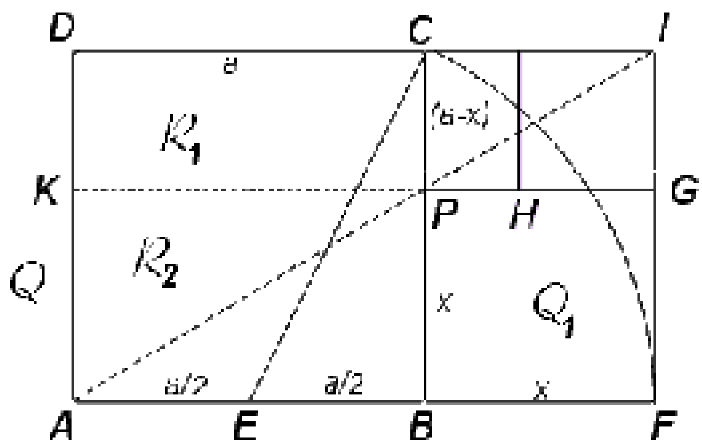
per n uguale ad un numero pari , si ha una terna di numeri frazionari, per n = 6 infatti si ha: $6, \frac{35}{2}, \frac{37}{2}$

I pitagorici prediligevano l’ uso dei numeri interi, perché per la scuola pitagorica, gli interi avevano un valore magico essendo rappresentativi dell’universo.

E’ noto, poi, lo sconforto causato dall’applicazione del teorema ad un triangolo rettangolo isoscele (come afferma Cantor), perché in tal caso il rapporto fra le lunghezze dell’ipotenusa e di un cateto è espresso da un numero irrazionale $\sqrt{2}$ .

Gli antichi tennero ben segreta tale scoperta, non sapendo giustificare l’essersi imbattuti in numeri non compresi nel loro “universo numerico” .

# RETTANGOLO AUREO

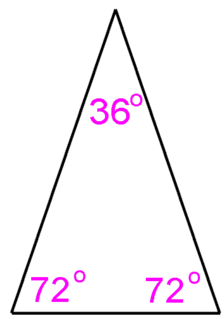



Dallo studio del rettangolo aureo, facendo il rapporto fra la misura dell'altezza e la base, trovarono il numero irrazionale detto "AUREO"

$$\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{2} = 0,6180339.....$$

L'inverso di questo numero e uguale a 1,618…..

# TRIANGOLO AUREO




Lo stesso numero si trova nel triangolo isoscele avente gli angoli alla base il doppio di quello del vertice, detto perciò triangolo aureo, in cui il rapporto fra la misura della base e del lato dà lo stesso numero irrazionale.

$$\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{2} = 0{,}6180339.....$$

Questo rapporto esce anche dallo studio del pentagono e del decagono regolare e si trova nella disposizione delle foglie e delle gemme delle piante, in quella dei petali di taluni fiori, nella stella di mare, nel corpo umano ecc..

Si interessarono a questo numero: matematici,artisti, botanici, zoologi ecc..